Exponentialfunktionen

Verwendetes Aufgabenbuch: *Algebra 2 von Deller, Gebauer, Zinn (DMK)*

1. Funktionsgleichungen

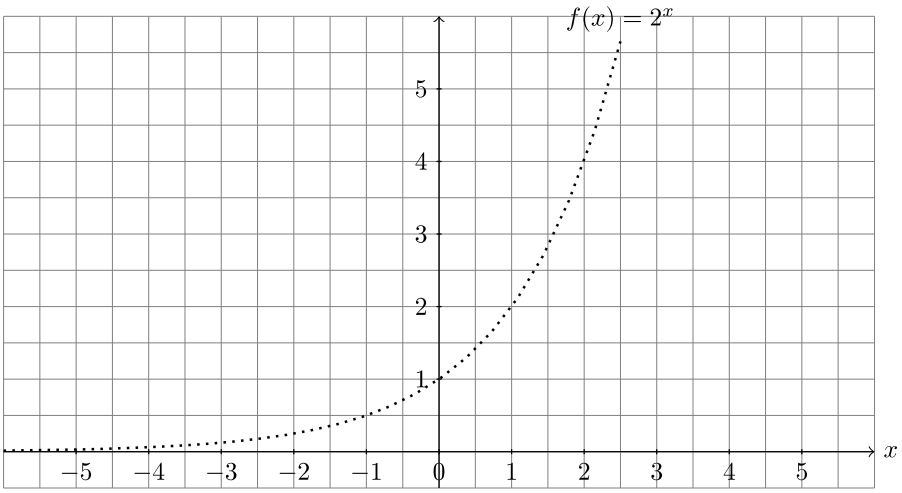
Definition Die Funktionsgleichung $f(x)=a^x$ heisst **Exponentialfunktion** mit **Basis** a. $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$.

Beispiel $f(x)=2^x$

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$1/16$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	16

Graph:



Eigenschaften von Exponentialfunktionen

- Definitionsbereich $D=\mathbb{R}$, Wertebereich $W=\{x\in\mathbb{R}; x>0\}$
- umkehrbar, d. h. es existiert eine Umkehrfunktion
- monoton steigend für $a>1$, monoton sinkend für $a<1$
- Punkt $(0,1)$ liegt auf $f(x)=a^x$
- x-Achse ist Asymptote

Definition Geraden, welcher sich der Graph immer mehr annähert, je weiter man vom Ursprung entfernt ist, nennt man **Asymptoten**.

Aufgaben Seite 64: 1, 3

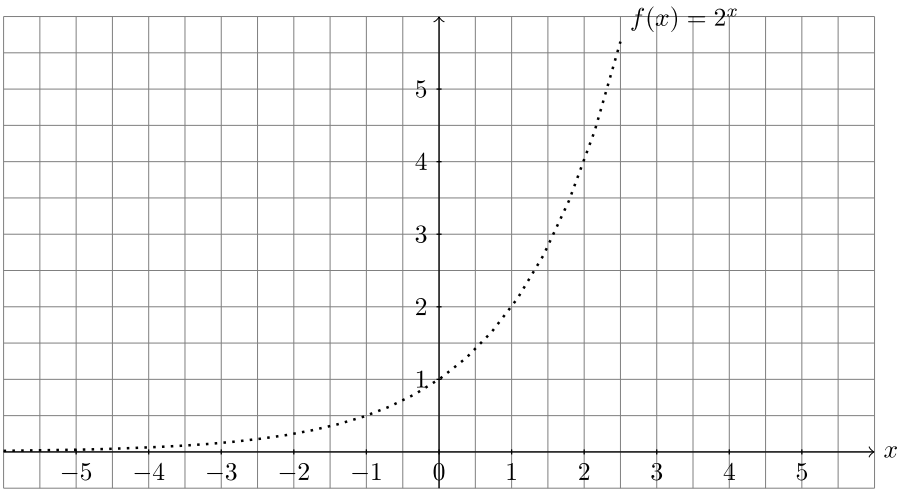
2. Allgemeine Funktionsgleichungen

Beispiel 1 $g(x)=2\cdot 2^x$

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$									

Graph:

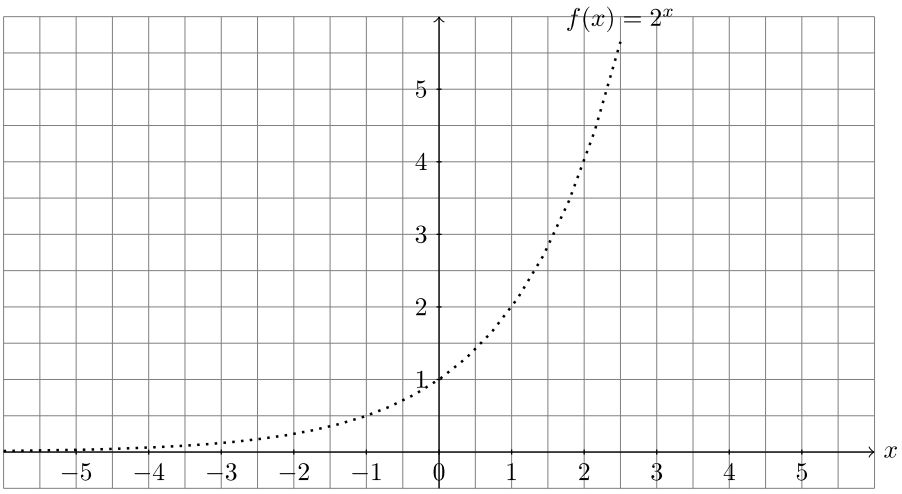


Beispiel 2 $h(x)=2^{(x-3)}$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h(x)$									

Graph:

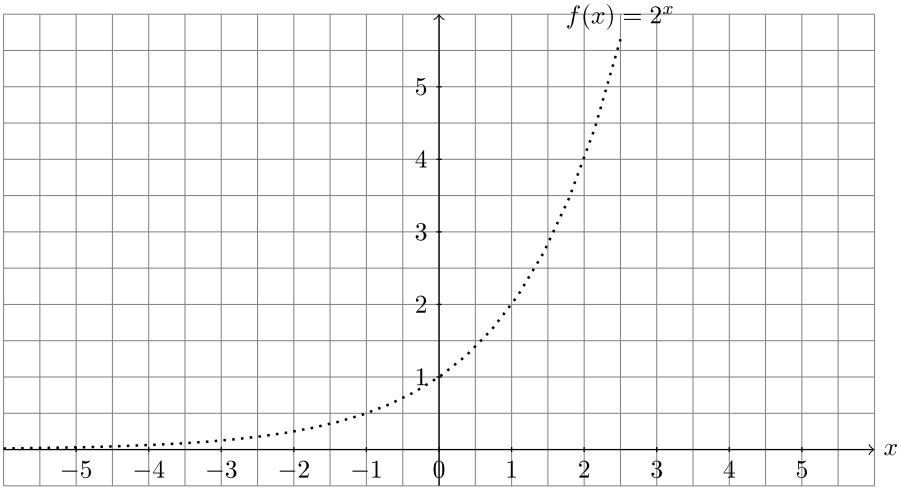


Beispiel 3 $i(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$i(x)$									

Graph:



Aufgaben Seite 64, 65: 5, 7, 9

Bemerkung (Aufgabe 9)

Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein Translationsvektor. Dann wird um a in x-Richtung und b in y-Richtung verschoben.

Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bedeutet Verschiebung um 1 nach rechts und 2 nach unten.

3. Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Beispiel Corona Es ist im Zusammenhang mit dieser Pandemie immer wieder von exponentiellem Wachstum die Rede. Wie ist das genau zu verstehen?

Am 13.03.20 gab es ca. 1000 Coronafälle. Die Wachstumsrate hat zu diesem Zeitpunkt ca. 25 % pro Tag betragen, d. h. dass es von Tag zu Tag 25 % mehr Fälle gab. Sei t die Zeit in Tagen seit 13.03.20. Am 14.03.20 ist $t=1$ und die Anzahl Fälle an diesem Tag wäre dann 1250. Am 15.03.20 ist $t=2$ und die Anzahl Fälle an diesem Tag wäre dann 1562 (25 % mehr als am Vortag).

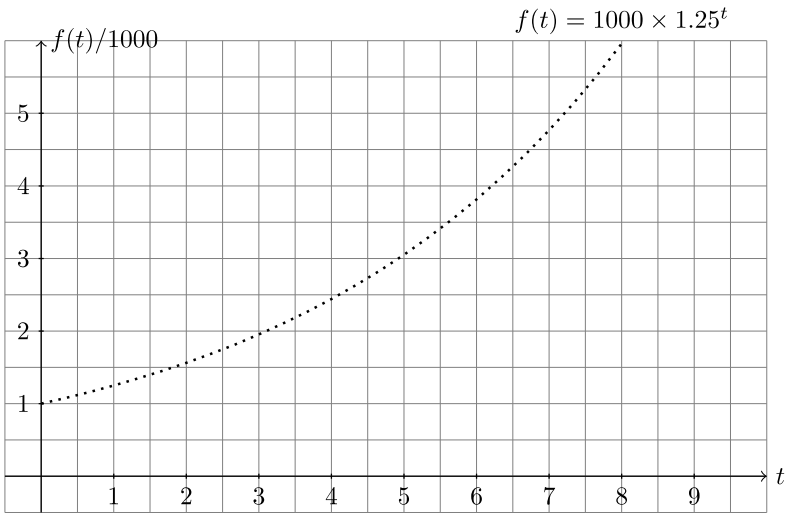
Die sogenannte Wachstumsfaktor r ist der Faktor um welchen die Anzahl Fälle sich erhöht pro Zeiteinheit. Demnach ist

$$r=\frac{f(t+1)}{f(t)}=1.25$$

Die Anzahl Fälle $f(t)$ an einem Zeitpunkt t ist dann

$f(t)=1000\cdot r^t=s\cdot r^t$ mit $s=1000$ als Startwert.

t	0	1	2	3	4	5	6	10	20
$f(t)$									



Am 18.03.20 gab es tatsächlich ca. 3000 Fälle. Das Modell hat die Realität zwischen 13.03.20 und 18.03.20 gut abgebildet. D. h. dass zu diesem Zeitpunkt die Wachstumsrate ca. 25 % war. Die Begrenzung der Bevölkerung und die getroffenen Massnahmen liessen die Wachstumsrate aber glücklicherweise sinken.

Das Wachstum gegeben durch $f(t)=s\cdot r^t$ ist ungehindertes Wachstum mit einem konstanten Wachstumsfaktor r.

Definition Ist t die Masszahl der Zeit, so nennt man $f(t)=s\cdot r^t$

für $r>1$ **exponentielle Wachstumsfunktion**,

für $0<r<1$ **exponentielle Zerfallsfunktion,**

wobei r der **Wachstumsfaktor** und s der **Startwert** ist.

Bemerkungen

- Der Startwert s ist der Wert zum Zeitpunkt $t=0$.
- Der Wachstumsfaktor r ist die Änderung vom Zeitpunkt t zu $t+1$:

$$r=\frac{f(t+1)}{f(t)}$$

Aufgaben

Seite 67: 18, 19, 16, 17, 21

Seite 68: 23, 25